Sobre geometría y técnicas de integración

On Geometry and Integration Techniques

Palabras clave: sustitución Weierstrass, técnicas de integración, curvas algebraicas.

Keywords: *Weierstrass substitution, integration techniques, algebraic curves.*

Investigaciones UCA
2023 - 2024
Memoria bienal
Año 3, Vol. 3
Julio 2025
p (140-142)
e-ISSN: 2789-4061

DOI: https://doi.org/10.51378/iuca.v3i3.10351

Yoceman Adony Sifontes Rivas
Doctor en Matemática
Departamento de Matemática
Universidad Centroamericana José Simeón Cañas
El Salvador
ysifontes@uca.edu.sv
ORCID: https://orcid.org/0009-0000-4626-8043

Introducción

Una pregunta frecuente de los estudiantes de un curso de cálculo integral, cuando se encuentran con las técnicas de integración, es ¿Cómo saber qué cambio de variable funciona para calcular una integral? Y más aún, con la Técnica de Integración por sustitución Weierstrass, la pregunta natural es ¿Por qué funciona? ¿Cómo se me va a ocurrir ese cambio? La respuesta a estas interrogantes se explora en esta investigación, al buscar las conexiones con otras áreas de la matemática, como lo son la Geometría, el Álgebra y en particular la geometría sobre cierto tipo de curvas. El objetivo es describir el origen de los cambios de variable para el cálculo de integrales indefinidas o definidas y su conexión con la geometría de curvas.

Preliminares

Intuitivamente, una *curva* es un objeto geométrico que localmente puede verse como un intervalo de la recta real, es decir, una variedad diferenciable de dimensión 1.

En la teoría de integración de una variable, el $\int \frac{dx}{cosx}$ integrando puede convertirse en una función racional haciendo $u = tan\frac{x}{2}$, $-\pi < x < \pi$ el cual implica, que las funciones $sinx$, $cosx$ y el diferencial dx pueden convertirse en $cosx = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $sinx = \frac{2u}{1+u^2}$ y $dx = \frac{2du}{1+u^2}$ y al hacer la sustitución, $\int \frac{dx}{cosx}$ se convierte en una función racional en la variable u, obteniendo así $\int \frac{dx}{cosx} = ln|1 - tan\frac{x}{2}| + ln|1 + tan\frac{x}{2}| + C$ donde C es una constante real. Este cambio es conocido como la *Sustitución Weierstrass* y su ventaja es que convierte una función $f(cosx, sinx)$, en una nueva función $f(u)$ de tipo racional, la cual se espera sea más sencilla de calcular. Para más detalles, ver [1] o bien [3].

Yoceman Adony Sifontes Rivas

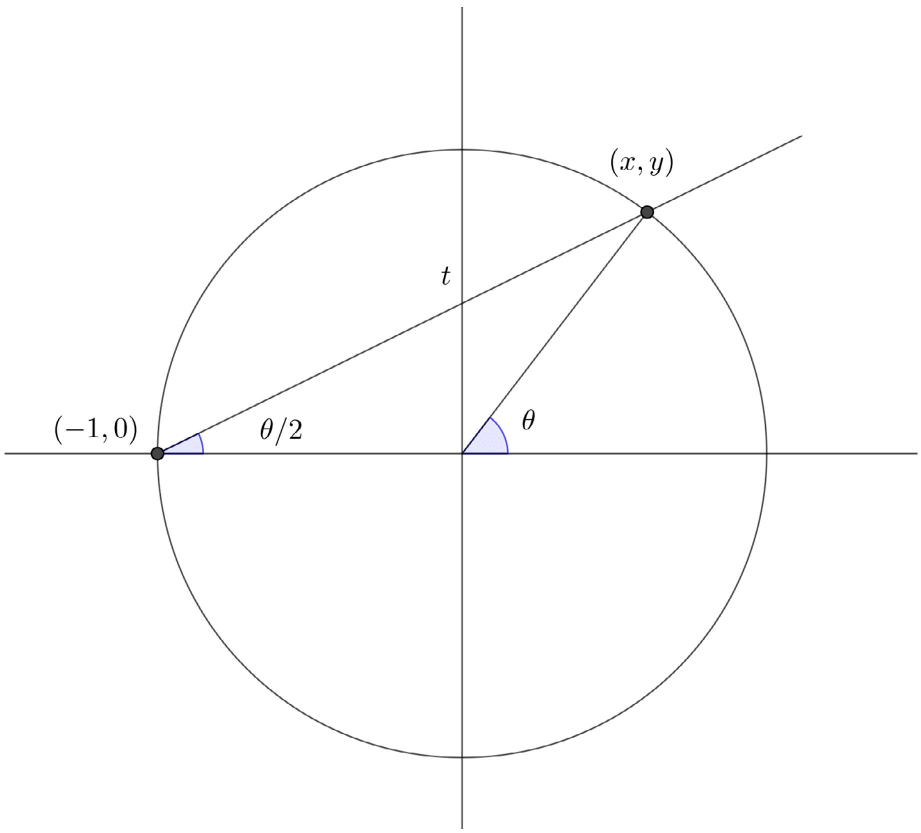
Investigaciones UCA
2023 - 2024
Memoria bienal
Año 3, Vol. 3
Julio 2025
p (140-142)
e-ISSN: 2789-4061

Geometría tras la sustitución Weierstrass

El cambio de sustitución Weierstrass proporciona una herramienta para el cálculo de integrales con funciones racionales que involucran alguna combinación de funciones trigonométricas, por tanto, resulta natural preguntarse:

¿Cuál es la conexión algebraica entre el cambio y la circunferencia?

La conexión algebraica viene de la ecuación $X^n + Y^n = Z^n$, n es un número natural mayor o igual que 2, particularmente, de la búsqueda de soluciones enteras a dicha ecuación o equivalentemente, de la búsqueda de soluciones racionales a la ecuación $x^n + y^n = 1$, ecuaciones que no tienen solución según el último *Teorema de Fermat*, $n \geq 3$ y que Andrew Wiles demostró en 1995. Para $n = 2$ y considerando la siguiente configuración:



se obtienen las relaciones

$$x = cos\theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$y = sin\theta = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

Yoceman Adony Sifontes Rivas

Sobre geometría y técnicas de integración

Investigaciones UCA
2023 - 2024
Memoria bienal
Año 3, Vol. 3
Julio 2025
p (140-142)
e-ISSN: 2789-4061

Las relaciones anteriores proporcionan, para algún número racional t, un punto con (x, y) componentes racionales en la circunferencia unitaria. Para curvas en general de la forma $ax^n + by^n = 1$ con $n \geq 3$, aunque el proceso de construcción de un cambio racional es similar, la búsqueda de soluciones enteras y racionales para este tipo de curvas aún no se ha comprendido por completo. Para más información, ver [2].

Conclusiones y perspectivas

El cambio por sustitución Weierstrass proporciona una herramienta para el cálculo de integrales con funciones racionales que involucran alguna combinación de funciones trigonométricas, por tanto, resulta natural preguntarse:

1. ¿Cuál es la conexión algebraica entre un cambio de variable y una curva en general?

2. Al realizar el cambio de sustitución Weierstrass y calcular alguna integral, el valor de la integral en sí se está calculando a lo largo de los puntos racionales de una curva cerrada simple (Curva de Jordan), por tanto ¿Qué otro tipo de integrales pueden evaluarse mediante los cambios similares o sobre los puntos racionales de ésta?

3. ¿Existen cambios similares al de la sustitución Weierstrass para otro tipo de curvas, no necesariamente una curva de Jordan?

Bibliografía

Kung, S. H. (2001). Proof without Words: The Weierstrass Substitution. *Mathematics Magazine, 74*(5), 393. https://doi.org/10.2307/2691035

Silverman, J. H. y Tate, J. T. (2015). *Rational Points on Elliptic Curves.* Springer. https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-18588-0

Spivak, M. (2006). *Calculus.* Cambridge University Press.