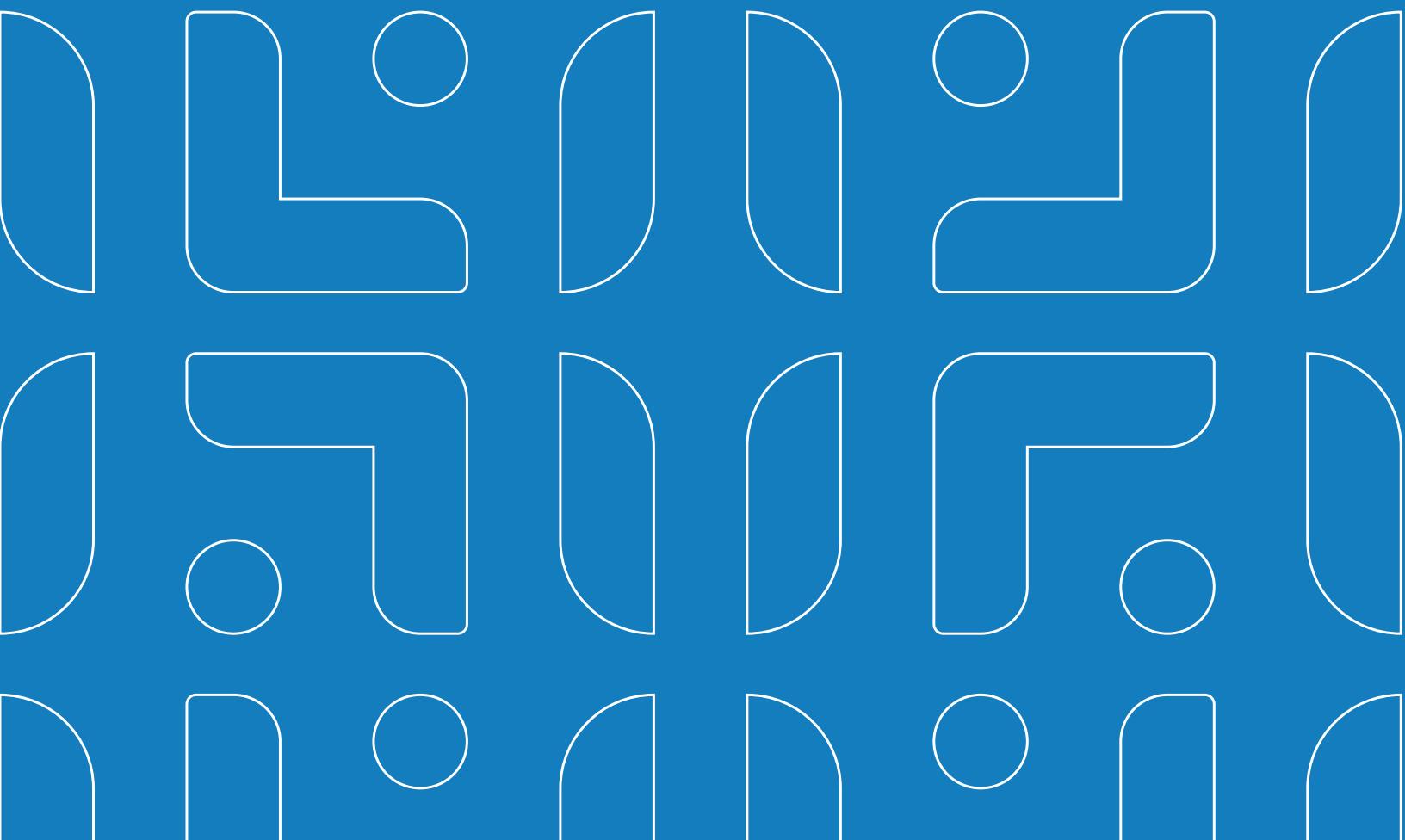


# TECNOLOGÍA Y EDUCACIÓN





## Un enfoque interactivo computacional para el apoyo de la enseñanza-aprendizaje del Método del Elemento Finito

*A Computational Interactive Approach to Support the Teaching–Learning Process of the Finite Element Method*

DOI: <https://doi.org/10.51378/ilia.vi2.9828>

Alfonso Ceseña Q.<sup>1</sup> Salvador Botello R.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Centro de Investigación en Matemáticas, A.C., Jalisco S/N, Col. Valenciana CP: 36023, Guanajuato, Gto, México, Apartado Postal 402, CP 36000, México. <https://www.cimat.mx/>

Autor por correspondencia: alfcseseq@cimat.mx

Fecha de recepción: 14 de junio de 2025

Fecha de aprobación: 12 de septiembre de 2025

### Resumen

El proceso de enseñanza-aprendizaje de asignaturas de contenido matemático sofisticado como el Método del Elemento Finito (MEF) involucra desafíos tales como una elevada abstracción de conceptos, traducciones complicadas a lenguajes de computadora, retos importantes en la visualización de fenómenos físicos y sus representaciones discretas, entre otros; conviene entonces apoyarse en estrategias didácticas innovadoras que promuevan la comprensión y asimilación significativa de los contenidos por parte de los estudiantes. En este trabajo proponemos un enfoque interactivo a través de una herramienta computacional como apoyo para dicho proceso, con énfasis en el acompañamiento para facilitar la comprensión conceptual y a la vez invitar a la participación activa mediante retroalimentación continua durante el estudio, permitiendo manipulación de parámetros, visualización y simulación de sus resultados, facilitando así el descubrimiento dinámico de los principios de MEF. Se toma como caso de aplicación el MEF por ser donde confluyen importantes vertientes teóricas y prácticas además de que su implementación en programas caseros conduce a retos de dificultad moderada. Se describe brevemente la teoría matemática subyacente al MEF junto con la metodología empleada para su desarrollo aunado a la arquitectura del sistema. Como resultado se perciben los beneficios que ofrece esta propuesta para el estudio de contenidos complicados tanto en el salón de clase, donde el docente puede ofrecer ejemplos variados a sus alumnos siguiendo un temario, como extraclase, ya que permite explorar ideas a ritmo propio y descubrir patrones que pudieran haber quedado ocultos en una primera aproximación a los temas brindando además una referen-

cia ajustable para orientar implementaciones propias que suelen encargarse en cursos como los del MEF.

**Palabras clave** – enseñanza-aprendizaje, elementos finitos, métodos numéricos, interactivos.

### Abstract

The teaching-learning process of subjects with sophisticated mathematical content such as the Finite Element Method (FEM) involves challenges such as a high degree of conceptual abstraction, complicated translations into computer languages, and significant challenges in visualizing physical phenomena and their discrete representations, among others. It is therefore appropriate to rely on innovative teaching strategies that promote students' understanding and meaningful assimilation of the content. In this work, we propose an interactive approach through a computational tool to support this process, with an emphasis on support to facilitate conceptual understanding while inviting active participation through continuous feedback during the study. This approach allows for parameter manipulation, as well as visualization and simulation of results, thus facilitating the dynamic discovery of FEM principles. The FEM is chosen as a case study because it is a place where important theoretical and practical aspects converge, and its implementation in home programs leads to challenges of moderate difficulty. The mathematical theory underlying the FEM is briefly described, along with the methodology used for its development and the architecture of the system. As a result, the benefits this proposal offers for the study of complex content are evident, both in the classroom, where teachers can offer varied examples to their students following a syllabus, and outside of class, as it allows students



Publicamos bajo la Licencia de Creative Commons Atribución-NoComercial 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0)

to explore ideas at their own pace and discover patterns that might have been hidden in a first approach to the topics. It also provides an adaptable reference to guide individual implementations, which are often required in courses such as those on the FEM.

**Keywords** – learning-teaching, finite elements, numerical methods, interactive.

## I. INTRODUCCIÓN

En un curso de MEF que tenga por objetivo lograr que el estudiante produzca su propia implementación se hará evidente que es necesario contar con una referencia que permita decidir si el trabajo va por buen camino debido a la gran cantidad de cálculos involucrados; éstos necesitan mucho espacio en libros o pizarrones para dar a entender los pasos y los componentes de las matrices locales o su ensamblaje en una matriz global. Si finalmente todos esos ingredientes serán volcados a la computadora, toma sentido que sea la misma la que sirva para explicar los detalles y brindar ayuda oportuna para el desarrollo de la implementación propia. Además, los ejemplos escritos en libros siempre son los mismos y esto necesariamente deja sin tratar detalles o situaciones que pudieran surgir al intentar llevar la teoría a la práctica. Esto conduce a proponer un marco de trabajo que permita la exposición de temas de manera flexible resultando así pertinente el enfoque del aprendizaje interactivo con las ventajas que ofrece.

### A. Aprendizaje interactivo

El aprendizaje interactivo es un enfoque educativo que pone al estudiante en el centro del proceso, lo que lo conduce a ser proactivo, crítico y reflexivo; en lugar de recibir pasivamente la información, el estudiante interactúa con el contenido, el docente y sus compañeros, lo que potencia la comprensión, la motivación y el pensamiento crítico. Algunas de las habilidades que se potencian a través de este enfoque son la resolución de problemas, la toma de decisiones, la colaboración y la comunicación, el uso de tecnologías de la información, la autonomía y la metacognición. El concepto de un enfoque interactivo computacional para el apoyo de la enseñanza-aprendizaje se fundamenta en la idea de transformar la experiencia educativa, haciendo que el aprendizaje sea activo, significativo y adaptativo. En este contexto, el objetivo principal es diseñar herramientas y entornos digitales que faciliten la comprensión de temas complejos, como el MEF, sin que la herramienta se convierta

simplemente en un “reproductor” de información, sino en un soporte dinámico que acompañe y oriente al estudiante en su proceso de descubrimiento y consolidación del conocimiento. La posibilidad de manipular parámetros de simulaciones y representar visualmente procesos o resultados sin demoras entre los estímulos y las reacciones es una de las grandes ventajas de un enfoque computacional interactivo ya que refuerzan la conexión entre teoría y práctica. En el caso del MEF, visualizar la discretización del dominio, el comportamiento de los elementos en respuesta a diferentes condiciones de contorno, o la variación de esfuerzos y tensiones, permite que conceptos abstractos se conviertan en experiencias tangibles. La capacidad de experimentar en un entorno controlado y seguro potencia la comprensión y el interés, haciendo que el aprendizaje sea más intuitivo ya que hay una participación activa en la construcción del conocimiento. Extensiones de este enfoque hacia el aprendizaje colaborativo y basado en proyectos reducen más la distancia entre el “saber” y el “hacer”. Lo que se enseña puede evolucionar, pero la modalidad de aprendizaje debe mantenerse centrada en el estudiante, siendo flexible e interactiva con miras en la mejora de la capacidad de adaptarse a diferentes contextos y niveles de complejidad para dejar de depender exclusivamente de la especificidad de un contenido fijo. Cambiar cómo se enseña y se aprende el MEF con el apoyo de la tecnología tiene el potencial de llevar más lejos los alcances de un curso que posiblemente emplea la mayor parte del tiempo en descifrar la notación y traducirla torpemente en programas de cómputo en vez de fomentar la experimentación y la resolución de problemas reales. Una herramienta educativa con capacidad para transformar la experiencia de aprendizaje simplificando la exposición de conceptos complicados mediante experimentación interactiva y personalizada es valiosa por atender las necesidades actuales de la educación superior.[1][2][3][4][5][6][7]

## II. METODOLOGÍA

### A. Arquitectura del sistema

La herramienta educativa está montada en una página web mediante una combinación de las tecnologías [8] HTML, CSS y Javascript y se puede visualizar en cualquier navegador web compatible. Esto significa que se puede usar desde dispositivos móviles tales como tabletas o teléfonos smartphone así como desde computadoras de escritorio y portátiles.

La página web no depende de un servidor web, esto permite usarla en situaciones que no requieran de almacenamiento; entonces se puede tener como un archivo que se puede cargar en el navegador web mediante el mecanismo de arrastrar y soltar sobre la ventana del navegador o escribiendo en la barra de direcciones del navegador web su ubicación en el sistema de archivos local. Por otra parte, también se cuenta con un programa de apoyo escrito en el lenguaje PHP que suele ser lanzado a ejecución por servidores web debidamente configurados para este propósito; esto permite almacenar para uso posterior distintos escenarios conformados por geometrías, topologías, propiedades de los materiales, asignaciones de los materiales a los distintos elementos, condiciones Dirichlet o Neumann, tipo de solver, cantidad de iteraciones o tolerancias de error; una vez almacenados se puede cambiar de uno a otro sin dificultad permitiendo así hacer comparaciones que pudieran servir para dar lecciones donde resulten relevantes los contrastes. Se emplea la tecnología MathJax[9] para el despliegue en el navegador web de símbolos matemáticos escritos en lenguaje tipográfico LaTeX, mientras que los dibujos, figuras y gráficos se proyectan sobre elementos CANVAS de HTML. Se usan los medios provistos por el navegador para entrada de datos por medio de teclado, mouse y sensores táctiles (en donde estén disponibles). Los cálculos se realizan internamente y se comunican los distintos módulos por medio del esquema de escucha de eventos, que constituye el núcleo de la interactividad. Los eventos son todas las acciones que ocurren y a las que los componentes de la página web reaccionan, tales como carga o descarga de elementos, entradas o salidas de las áreas de enfoque por medio de dispositivos periféricos (por ejemplo, cuando el puntero del mouse entra o sale o pasa por encima de un dibujo), activación o desactivación de componentes (por ejemplo, al pulsar un botón de una página web), desplazamiento vertical u horizontal en el despliegue de la página web, entre otros.

Una de las ventajas de usar las tecnologías web mencionadas es que se puede modificar el contenido mostrado en pantalla sin tener que recargar la página web, dando la ilusión de que la página web se estuviera editando a sí misma. Esto permite que el contenido tenga un sabor dinámico y responda a las necesidades que requiera cada situación. Concretamente, en una exposición de un tema se puede presentar inicialmente un contenido genérico que gradualmente se puede ir adaptando a un ejemplo particular reaccionando a los elementos interactivos tales

como campos de texto, controles de deslizamiento o desplazamientos de componentes activos dentro de gráficos sin tener que cargar otra página o recurrir a programas externos. Con esto se consigue que lo que inicialmente se muestra como un ejemplo típico o genérico, eventualmente se va modificando y especializando bajo demanda, de manera tal que termina siendo un ejemplo muy específico, que fue construido in-situ con la intención de resolver las dudas que fueron surgiendo en el camino.

El temario del curso se agrupa en módulos de manera que los contenidos son más enfocados en los aspectos relevantes de cada tema y hay una guía didáctica de actividades para acompañar el proceso de enseñanza-aprendizaje. Por otra parte, también se ofrece la posibilidad de libre exploración sin estar atado a un tema en particular, en donde la herramienta puede ser usada a voluntad para experimentar, explorar y descubrir patrones.

## B. Método de los elementos finitos

Para fijar ideas desarrollaremos brevemente el caso de la solución con MEF de la ecuación de calor 2D sobre un elemento triangular ABC con coordenadas:  $A[0,0]$ ,  $B[1,0]$ ,  $C[0.951057, 0.309017]$ , de un material con propiedades isotrópicas constantes de difusión térmica  $Q=K_x=K_y=1$ , con condiciones de temperatura en sus vértices:  $\phi_B = 10$ ,  $\phi_C = 10$ ,  $\phi_A$  = valor por determinar.

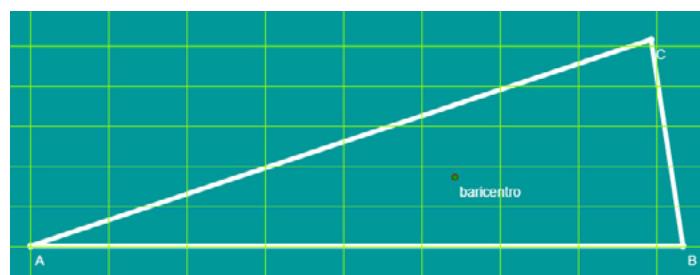


Fig. 1. Disposición del triángulo empleado como ejemplo de aplicación del MEF.

Presentamos primero la teoría que suele darse en clase [10][11][12][13] y enseguida la aplicaremos al ejemplo desarrollado con la intención de mostrar también lo que la herramienta educativa propuesta ofrece en esta etapa de desarrollo.

La forma fuerte de la ecuación de calor 2D, la incógnita principal es  $\phi$ :

$$0 = Q(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} \right) \quad (1)$$

Los flujos, son incógnitas secundarias:

$$\begin{bmatrix} q_x(x, y) \\ q_y(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_x \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} \\ -K_y \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Las condiciones de contorno:

$$\partial\Omega = \partial\Omega_\Phi \cup \partial\Omega_q \quad (3)$$

$$\emptyset = \partial\Omega_\Phi \cap \partial\Omega_q \quad (4)$$

$$\Phi = \hat{\Phi}, \forall (x, y) \in \partial\Omega_\Phi \quad (5)$$

$$\nabla\Phi = \hat{q}, \forall (x, y) \in \partial\Omega_q \quad (6)$$

La forma débil obtenida por residuos ponderados de la ecuación de calor 2D:

$$0 = \int_{\Omega} W(x, y) Q(x, y) d\Omega + \int_{\Omega} W(x, y) \nabla \cdot \begin{bmatrix} K_x \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} \\ K_y \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix} d\Omega + W(x, y) (\Phi - \hat{\Phi})_{\partial\Omega_\Phi} + W(x, y) (q - \hat{q})_{\partial\Omega_q} \quad (7)$$

Se puede aplicar integración por partes en el producto de W por la divergencia del negativo de los flujos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} W(x, y) \nabla \cdot \begin{bmatrix} K_x \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} \\ K_y \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix} d\Omega &= \\ &= \int_{\Omega} \nabla \cdot \left( W(x, y) * \begin{bmatrix} K_x \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} \\ K_y \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \nabla W(x, y) \cdot \\ &\quad \begin{bmatrix} K_x \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} \\ K_y \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix} d\Omega \end{aligned} \quad (8)$$

Se logra una simplificación adicional aplicando el teorema de la divergencia en el término respectivo:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \cdot \left( W(x, y) * \begin{bmatrix} K_x \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} \\ K_y \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix} \right) d\Omega &= \oint_{\partial\Omega} \bar{n} \cdot \left( W(x, y) * \begin{bmatrix} K_x \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} \\ K_y \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix} \right) d\partial\Omega \end{aligned} \quad (9)$$

Se toma una partición del dominio 2D en elementos. El elemento más sencillo es el triangular, por eso es el primero que se estudia. Entonces, considerando que en las fronteras de los elementos interiores se anulan mutuamente los flujos inter-elementales desaparecen algunos términos y la ecuación de calor para cada elemento queda:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega^e} W(x, y) Q(x, y) d\Omega^e = \int_{\Omega^e} \nabla W(x, y) \cdot \\ &\quad \begin{bmatrix} K_x & 0 \\ 0 & K_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix} d\Omega^e \end{aligned} \quad (10)$$

En cada elemento se definen nodos y en esos nodos se definen funciones de interpolación conocidas como funciones de forma tales que valen 0 en

todos los nodos excepto en el nodo de definición, en donde valen 1. Tales funciones pueden definirse directamente en el dominio del problema usando lo que se conoce como coordenadas cartesianas o pueden definirse en un dominio normalizado usando lo que se conoce como coordenadas naturales. Una ventaja de usar un dominio normalizado es que unifica los cálculos que ya no tienen que ser particulares para cada parte del dominio y además se gana la posibilidad de emplear más adelante cuadratura Gaussiana con valores conocidos tabulados. El precio a pagar es que hay que hacer una transformación de coordenadas por cada elemento y calcular la distorsión del espacio causada por tal transformación.

Las funciones de forma en el dominio normalizado para un triángulo con nodos en los vértices:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_A(\xi, \eta) \\ N_B(\xi, \eta) \\ N_C(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \xi - \eta \\ \xi \\ \eta \end{bmatrix} \quad (11)$$

La transformación de coordenadas está dada por combinaciones lineales de funciones de forma:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum N_i(\xi, \eta) x_i \\ \sum N_i(\xi, \eta) y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_A \\ N_B \\ N_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \xi - \eta)x_A + \xi x_B + \eta x_C \\ (1 - \xi - \eta)y_A + \xi y_B + \eta y_C \end{bmatrix} \quad (12)$$

La distorsión del espacio causada por la transformación se captura en la matriz Jacobiana:

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial}{\partial \xi} N_k x_k & \sum \frac{\partial}{\partial \xi} N_k y_k \\ \sum \frac{\partial}{\partial \eta} N_k x_k & \sum \frac{\partial}{\partial \eta} N_k y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} N_A & \frac{\partial}{\partial \xi} N_B & \frac{\partial}{\partial \xi} N_C \\ \frac{\partial}{\partial \eta} N_A & \frac{\partial}{\partial \eta} N_B & \frac{\partial}{\partial \eta} N_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{bmatrix} \quad (13)$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} N_k \\ \frac{\partial}{\partial \eta} N_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} N_k \\ \frac{\partial}{\partial y} N_k \end{bmatrix} \quad (14)$$

Si la matriz Jacobiana es invertible:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \mathcal{N}_k \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \mathcal{N}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{N}_k \\ \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{N}_k \end{bmatrix} \quad (15)$$

Aplicando la matriz Jacobiana inversa a las derivadas de las funciones de forma definidas en cada nodo en los desarrollos de la regla de la cadena se puede definir la matriz siguiente:

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{N}_A}{\partial x} & \frac{\partial \mathcal{N}_B}{\partial x} & \frac{\partial \mathcal{N}_C}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathcal{N}_A}{\partial y} & \frac{\partial \mathcal{N}_B}{\partial y} & \frac{\partial \mathcal{N}_C}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathcal{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{N}_A}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathcal{N}_B}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathcal{N}_C}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathcal{N}_A}{\partial \eta} & \frac{\partial \mathcal{N}_B}{\partial \eta} & \frac{\partial \mathcal{N}_C}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Volviendo a la ecuación de calor, para aplicar las funciones de forma en cada elemento del dominio se emplea el enfoque de Galerkin:

$$W(x,y) = \mathcal{N}(x,y) \quad (17)$$

Entonces la ecuación de calor queda expresada en términos de las funciones de forma para un nodo k:

$$\int_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial \mathcal{N}_k}{\partial x} \quad \frac{\partial \mathcal{N}_k}{\partial y} \right] \begin{bmatrix} K_x & 0 \\ 0 & K_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix} d\Omega^e = \quad (18)$$

La incógnita  $\phi$  también se puede expresar como combinación lineal de las funciones de forma:

$$\Phi(x,y) = \sum \mathcal{N}_k(\xi, \eta) \phi_k \quad (19)$$

Como sus derivadas aparecen en la ecuación de calor se pueden sustituir:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \phi \\ \frac{\partial}{\partial y} \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{N}_k \phi_k \\ \sum \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{N}_k \phi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{N}_A \phi_A + \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{N}_B \phi_B + \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{N}_C \phi_C \\ \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{N}_A \phi_A + \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{N}_B \phi_B + \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{N}_C \phi_C \end{bmatrix} = \mathbb{B} \Phi \quad (20)$$

Entonces apilando las expresiones de la ecuación de calor para cada nodo queda expresada matricialmente en términos de las funciones de forma y sus derivadas:

$$\int_{\Omega^e} \mathbb{N} Q d\Omega^e = \int \mathbb{B}^T \mathbb{D} \mathbb{B} d\Omega^e \Phi \quad (21)$$

La integración se efectúa mediante cuadratura Gaussiana:

$$\sum_{p_{G_g}} \mathbb{N}_{p_{G_g}} Q |det \mathcal{J}_{p_{G_g}}| w_{p_{G_g}} = \left( \sum_{p_{G_g}} \mathbb{B}_{p_{G_g}}^T \mathbb{D} \mathbb{B}_{p_{G_g}} |det \mathcal{J}_{p_{G_g}}| w_{p_{G_g}} \right) \Phi \quad (22)$$

Esto lleva a un sistema de ecuaciones que todavía se podrá simplificar tomando en cuenta las condiciones Dirichlet o Neumann. Forzosamente debe haber una condición Dirichlet al menos para eliminar singularidades en la matriz de coeficientes del sistema.

$$\mathbb{F}^e = \mathbb{K}^e \Phi \quad (23)$$

### C. Aplicación de la herramienta para resolver el ejemplo

Con el módulo de solución de la ecuación de calor con MEF cargado, el usuario elige por medio de un menú desplegable el tipo de problema que quiere explorar. En nuestro ejemplo se elige un tipo de problema de 2 ejes:



Fig. 2. Elección del tipo de problema aplicación del MEF.

El usuario define por medio del teclado en un campo de texto la geometría (ubicaciones) y topología (conectividades) y los tipos de elementos del problema por medio de una sintaxis que el mismo programa le va enseñando a usar; simultáneamente, el programa le va mostrando de manera inmediata el resultado gráfico de lo que va escribiendo en el campo de texto. Si la orientación de algún elemento no es

la correcta para emplear MEF se le indica por medio de un mensaje de texto en pantalla y de manera gráfica con señales visuales como colores y patrones de líneas entrecortados.



Fig. 3. Definición de la geometría y topología del problema.

También se puede usar el dispositivo táctil o mouse para manipular asas virtuales para modificar las formas o las posiciones de los objetos; éstas se representan con puntos circulares gruesos coloreados y el puntero del mouse cambia de forma a manera de retroalimentación para indicar que la capacidad de manipulación por medio de asas está activada o desactivada:

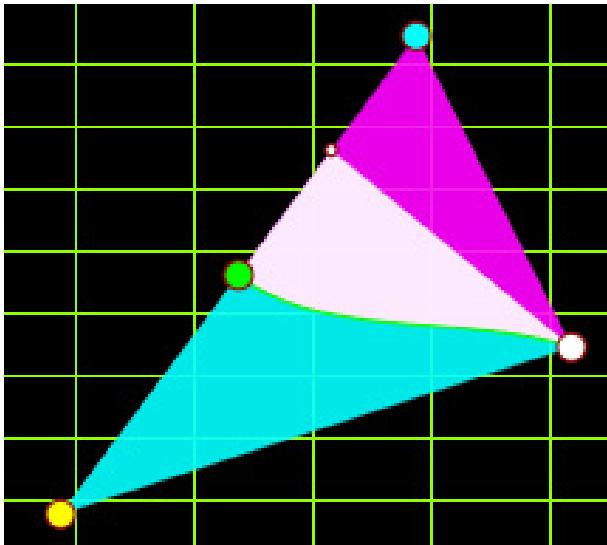


Fig. 4. Figuras manipulables mediante asas virtuales.

El usuario puede avanzar en un procedimiento paso a paso hacia adelante o hacia atrás o ver un despliegue completo de las cuentas, así como aumentar o disminuir el nivel de detalle; todas las cuentas se actualizan dinámicamente, incluyendo reacciones a las manipulaciones de asas virtuales o modificaciones al texto que define la geometría y la topología, permi-

tiendo estudiar patrones o revisar el buen avance de implementaciones propias. Esto constituye la parte modular de este trabajo ya que incrementa la claridad en la exposición del tema reduciendo así las dudas que por experiencia surgen rutinariamente de generación en generación tales como: ¿de qué tamaño son las matrices?, ¿en qué puntos debo evaluar las funciones de forma?, ¿cómo se calcula el Jacobiano?, ¿es un Jacobiano por elemento o por nodo?, ¿en dónde se evalúa?:

$$\begin{aligned}
 &\text{para cada elemento} \\
 &[x] = \begin{bmatrix} \sum_i N_i(\xi, \eta)x_i \\ \sum_i N_i(\xi, \eta)y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \xi - \eta)(0.0) + \xi(1.0) + \eta(0.9511) \\ (1 - \xi - \eta)(0.0) + \xi(0.0) + \eta(0.309) \end{bmatrix} \\
 &\text{para cada punto de integración} \\
 &w_{p_{\xi\eta}} = 0.5 \\
 &\xi = \frac{1}{3}, \eta = \frac{1}{3} \\
 &J_{p_{\xi\eta}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi}(\xi, \eta)x_i & \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta}(\xi, \eta)x_i \\ \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi}(\xi, \eta)y_i & \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta}(\xi, \eta)y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_A + x_B & -y_A + y_B \\ -x_A + x_C & -y_A + y_C \end{bmatrix} \\
 &J_{p_{\xi\eta}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0.0) + (1.0) & -(0.0) + (0.0) \\ (0.0) + (0.9511) & -(0.0) + (0.309) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1.0) & (0.0) \\ (0.9511) & (0.309) \end{bmatrix} \\
 &\det(J_{p_{\xi\eta}}) = (-0.0) + (1.0) \cdot (-0.0) + (0.309) = (-0.0) + (0.0) \cdot (-0.0) + (0.9511) \\
 &\det(J_{p_{\xi\eta}}) = (1.0)(0.309) - (0.0)(0.9511) \\
 &\det(J_{p_{\xi\eta}}) = (0.309) - (0.0) \\
 &\det(J_{p_{\xi\eta}}) = (0.309) \\
 &J_{p_{\xi\eta}}^{-1} = \frac{1}{\det(J_{p_{\xi\eta}})} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} = \frac{1}{(0.309)} \begin{bmatrix} -x_A + y_C & x_A - y_B \\ -x_A + x_C & -x_A + x_B \end{bmatrix} = \frac{1}{(0.309)} \begin{bmatrix} (0.306) & (0.0) \\ (-0.9511) & (1.0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1.0) & (0.0) \\ (-3.0777) & (3.2361) \end{bmatrix} \\
 &N_{p_{\xi\eta}} = \begin{bmatrix} N_1(0.3333, 0.3333) \\ N_2(0.3333, 0.3333) \\ N_3(0.3333, 0.3333) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 0.3333 - 0.3333 \\ 0.33333333333333 \\ 0.33333333333333 \end{bmatrix} \\
 &F^e = \sum_{p_{\xi\eta}} N_{p_{\xi\eta}} Q | \det(J_{p_{\xi\eta}}) | w_{p_{\xi\eta}} = \begin{bmatrix} 0.33333333333333 \\ 0.33333333333333 \\ 0.33333333333333 \end{bmatrix} (1)(0.309)(0.5) = \begin{bmatrix} 0.05150283333333345 \\ 0.0515028333333333 \\ 0.0515028333333333 \end{bmatrix} \\
 &B_{p_{\xi\eta}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial \xi} & \frac{\partial V}{\partial \eta} & \frac{\partial V}{\partial C} \\ \frac{\partial M}{\partial \xi} & \frac{\partial M}{\partial \eta} & \frac{\partial M}{\partial C} \\ \frac{\partial A}{\partial \xi} & \frac{\partial A}{\partial \eta} & \frac{\partial A}{\partial C} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial C} \\ \frac{\partial M}{\partial x} & \frac{\partial M}{\partial y} & \frac{\partial M}{\partial C} \\ \frac{\partial A}{\partial x} & \frac{\partial A}{\partial y} & \frac{\partial A}{\partial C} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &B_{p_{\xi\eta}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -0.15838287213972047 & -3.077685046457553 & 3.2390679185934758 \\ 0 & 1 & -3.077685046457783 \\ 0 & 0 & 3.2390679185934758 \end{bmatrix} \\
 &B_{p_{\xi\eta}}^T DB_{p_{\xi\eta}} = \begin{bmatrix} 0.1250851341872271 & -0.5155474026011852 & -0.5125377313860419 \\ -0.5125474026011852 & 10.47214525165054 & -9.950597842363608 \\ 0.5125377313860419 & -0.950597842363608 & 10.47213557374001 \end{bmatrix} \\
 &K^e = \sum_{p_{\xi\eta}} B_{p_{\xi\eta}}^T DB_{p_{\xi\eta}} |\det(J)| w_{p_{\xi\eta}} = \begin{bmatrix} 0.15838436645556717 & -0.0791929338570692 & -0.0791929338570692 \\ -0.0791929338570692 & 1.618035458125847 & -1.5388425232687787 \\ -0.0791929338570692 & -1.5388425232687787 & 1.618035458125847 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_A \\ \phi_B \\ \phi_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.05150283333333345 \\ 0.0515028333333333 \\ 0.0515028333333333 \end{bmatrix} \\
 &\phi_A = \frac{V_1 - \phi_B * K_{1,2} - \phi_C * K_{1,3}}{K_{1,1}} = \frac{0.05150283333333345 - 10 + -0.0791929338570692 - 10 * -0.0791914390696025}{0.15838436645556717} = 10.35176243627439
 \end{aligned}$$

Fig. 5. Despliegue completo de los cálculos paso a paso.

El programa permite procesar mallas más sofisticadas incluyendo elementos de tipos distintos y facilita comprender su ensamblaje en la matriz global:

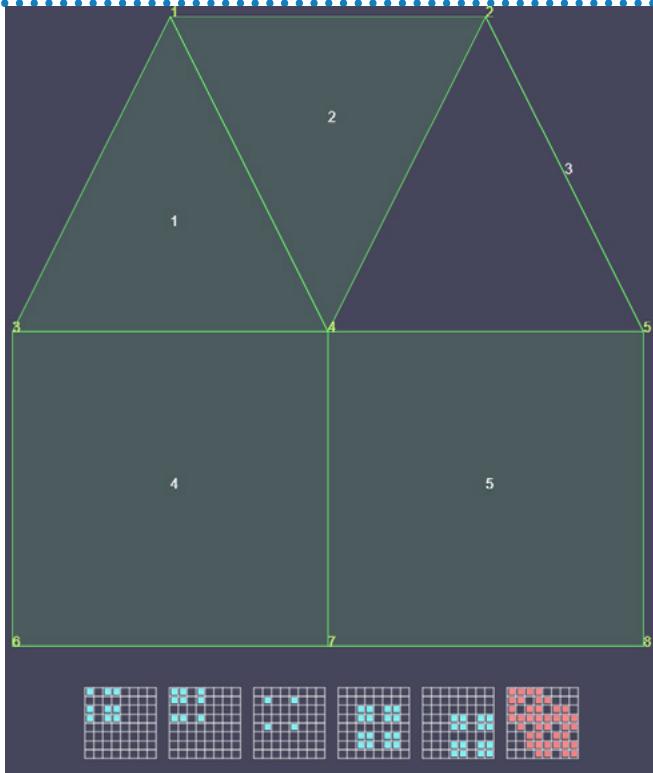


Fig. 6. Ejemplo de una malla con distintos tipos de elementos y su posición relativa en el ensamblaje global.

### III. CONCLUSIONES

La plataforma de software propuesta ofrece capacidades interactivas que brindan flexibilidad y versatilidad para exponer dinámicamente contenido educativo. El beneficio es evidente en el salón de clase pues el docente puede ofrecer ejemplos variados a sus alumnos siguiendo un temario y también fuera del salón de clase ya que permite explorar ideas a ritmo propio y descubrir patrones que pudieran haber quedado ocultos en una primera aproximación a los temas. Constituye además una referencia ajustable para orientar implementaciones propias que suelen encargarse en cursos como los del Método de los Elementos Finitos.

### AGRADECIMIENTOS

Alfonso Ceseña Quiñones agradece a SECIHTI por el apoyo 831415 de Becas Nacionales para Formación Académica.

### REFERENCIAS

[1] J.A. Beltrán Llera, Procesos, estrategias y técnicas de aprendizaje, 1<sup>a</sup> ed. Madrid: Editorial Síntesis, S.A., 1998

- [2] M. I. Quiroz Moreira, «Impacto del Aprendizaje Basado en Proyectos con Tecnología Digitales en el Desarrollo de Habilidades de Pensamiento Crítico en Estudiantes de Educación Básica», Ciencia Latina, vol. 8, n.<sup>o</sup> 5, pp. 476-498, oct. 2024.
- [3] J. P. Gee, What video games have to teach us about learning and literacy, 1<sup>a</sup> ed. New-York: Palgrave Macmillan, 2003.
- [4] M. A. Bonilla, «Estrategias metodológicas interactivas para la enseñanza y aprendizaje en la educación superior», RCUISRAEL. [En línea]. Disponible: <https://doi.org/10.35290/rcui.v7n3.2020.282>. [Accedido: 27 sep. 2025].
- [5] M. Ochoa, «Descubre cómo transformar el aprendizaje con contenido interactivo», ÉDIFICE. [En línea]. Disponible: <https://edifice.io/es/noticias/descubre-como-transformar-el-aprendizaje-con-contenido-interactivo/>. [Accedido: 27 sep. 2025].
- [6] J. Calua Torres, «Factores de éxito en la implementación del aprendizaje electrónico en programas educativos virtuales en educación superior: revisión sistemática», Conrado. [En línea]. Disponible: [http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1990-86442022000400014&lng=es&nrm=iso](http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1990-86442022000400014&lng=es&nrm=iso). [Accedido: 27 sep. 2025].
- [7] D.L. Linero Segrera, «Enseñanza del método de los elementos finitos en ingeniería civil y mecánica utilizando el programa de computador a código abierto PEFICA», Revista Educación en Ingeniería. [En línea]. Disponible: <https://educacioningenieria.org/index.php/edi/article/view/242>. [Accedido: 27 sep. 2025].
- [8] W3Schools Online Web Tutorials, «W3Schools Online Web Tutorials». [En línea]. Disponible: <https://www.w3schools.com/>. [Accedido: 27 sep. 2025].
- [9] MathJax, «MathJax | Beautiful math in all browsers». [En línea]. Disponible: <https://www.mathjax.org/>. [Accedido: 27 sep. 2025].
- [10] S. Botello, H. Esqueda, A. P. Sánchez. «Notas de Modelación y Métodos Numéricos 8, Modulo de Aplicaciones del Método de los Elementos Finitos, MEFI2020». 1<sup>a</sup> ed. Guanajuato: CIMAT-CIMNE, 2020.
- [11] S. Botello, M. A. Moreles, E. Oñate, «Módulo de Aplicaciones del Método de los Elementos Fi-

- nitos para Resolver la Ecuación de Poisson», 1<sup>a</sup> ed. Guanajuato: CIMAT A.C., Jul. 2010.
- [12] S. Botello, H. Esqueda, F. Gómez, M. Moreles, E. Oñate, «MEFI 1.0. Módulo de aplicaciones del método de los elementos finitos». 1<sup>a</sup> ed. Guanajuato: U. de Gto, CIMAT A.C., CIMNE. 2003.
- [13] H. Esqueda Oliva, «Aplicación del Método de los Elementos Finitos en la Simulación de Cementaciones Superficiales», 1<sup>a</sup> ed. Guanajuato: Univ. de Guanajuato, 2012. [En línea]. Disponible: <http://repositorio.ugto.mx/handle/20.500.12059/1056>. [Accedido: 27 sep. 2025].